Varianta 070

Subiectul I

a) $AB = 5$.

b) $|12 - 7i| = \sqrt{193}$.

c) $(x-1)^2 + (y-3)^2 - 1 = 0$.

d) $S_{ABC} = 6$.

e) $\cos\frac{3\pi}{7} > \cos\frac{5\pi}{7}$.

f) $x + y - 4 = 0$.

Subiectul II.

1.

a) 6.

b) 16.

c) suma rădăcinilor ecuației este egală cu 0.

d) $1 + 5 + 9 + 13 + ... + 37 = 190$.

e) $x_1 + x_2 + x_3 = -2$.

2.

a) $f'(x) = 1 + \cos x$, $x \in \mathbf{R}$.

b) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

d) $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 2 + \frac{\pi^2}{2}$.

e) $\lim_{n \to \infty} n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = 2$.

Subiectul III.

a) Evident, punând $x = y = 0$ în ipoteză.

b) Pentru orice $x \in \mathbf{Z}$, punând $y = -x$ în relația din enunț, obținem
$f(-x) = -f(x)$.

c) Se demonstrează prin inducție, folosind relația din ipoteză.

d) Pentru $n = 0$, avem $f(0) = 0 = a \cdot 0$.

Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, alegând $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$ în **c)**, obținem $f(n) = a \cdot n$

Pentru $x \in \mathbf{Z}$, $x < 0$, din **b)** şi **a)** deducem că $f(x) = a \cdot x$.

e) Evident, folosind definiția funcției injective.
f) Dacă $a=0$, f este funcția nulă, care nu este surjectivă. Dacă $a \neq 0$, alegem $p, q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$ astfel încât $f(1)=a=\frac{p}{q}$. Fie $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ astfel încât $(n, q)=1$.

Atunci $\frac{1}{n} \notin \operatorname{Im} f$, deci funcția f nu este surjectivă.
g) Ca şi la punctele anterioare se arată că $\forall n \in \mathbf{N}^*$ şi $\forall x \in \mathbf{Q}$, $g(nx)=n \cdot g(x)$.
Presupunem că există $a \in \mathbf{Q}^*$ şi $b \in \mathbf{Z}^*$ astfel încât $g(a)=b$.

Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, avem $b=g(a)=n \cdot g\left(\frac{a}{n}\right)$, deci numărul $b \in \mathbf{Z}^*$ are o infinitate de divizori naturali, fals.

Subiectul IV.
a) $f'(x)=\frac{1}{x \cdot \ln x}$, $\forall x>1$.
b) $f''(x)<0$, $\forall x>1$, deci funcția f' e strict descrescătoare pe $(1, \infty)$.
c) Considerăm $k \in (1, \infty)$. Funcția f este o funcție Rolle pe $[k, k+1]$ şi din teorema lui Lagrange deducem că există $c \in (k, k+1)$ astfel încât $\frac{f(k+1)-f(k)}{k+1-k}=f'(c) \overset{a)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \quad f(k+1)-f(k)=\frac{1}{c \cdot \ln c}$.
d) Se foloseşte punctul **c)** şi monotonia funcției f'.
e) Din **d)** se arată că $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, avem $b_{n+1}-b_n<0$ şi $c_{n+1}-c_n>0$,
deci şirul $(b_n)_{n\geq 2}$ este strict descrescător iar şirul $(c_n)_{n\geq 2}$ este strict crescător.
f) Pentru $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, avem $b_n-c_n>0$ şi folosind monotonia celor două şiruri deducem: $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $c_2<c_n<b_n<b_2$.
Obținem că şirurile $(b_n)_{n\geq 2}$ şi $(c_n)_{n\geq 2}$ sunt convergente, fiind monotone şi mărginite.
Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=c$.
Trecând la limită în (1) deducem $b-c=0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty} c_n$.
g) Deoarece şirul $(b_n)_{n\geq 2}$ este convergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(b_n+\ln(\ln n))=+\infty$.

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(2^n+1)\cdot\ln(2^n+1)}+\frac{1}{(2^n+2)\cdot\ln(2^n+2)}+\ldots+\frac{1}{3^n\cdot\ln(3^n)}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_{3^n}-a_{2^n})=$

$\lim\limits_{n\to\infty}(b_{3^n}-b_{2^n})+\lim\limits_{n\to\infty}(f(3^n)-f(2^n))=\ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)$.